УДК 531.36.

Обсуждены вопросы моделирования некоторых мехатронных систем, как неголономных систем. Предложена программная реализация разработанного метода решения задач стабилизации. Векторные уравнения движения системы, уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением и явным видом нелинейных членов составлены при помощи разработанного с использованием Maple 9.5 программного модуля. Коэффициенты управления и идентификатора определены решением методом Н.Н.Красовского линейно-квадратичных задач для выделяемых линейных управляемых подсистем.

К стабилизации установившихся движений некоторых моделей мобильных роботов

Красинский А.Я., Халиков А.А.
(Московский Государственный Университет Прикладной Биотехнологии)
krasinsk@mail.ru

Любая мехатронная система включает в себя подсистемы различной физической природы, работающие в неразрывном единстве на одну цель. Такое единство может быть достигнуто только за счет возможно более полного (в идеале – предельного) использования потенциальных возможностей каждой из этих подсистем для уменьшения габаритов, сокращения затрат мощности, ресурсов (потоков вещества, измерительной информации и пр.) для формирования управления и повышения надежности системы за счет упрощения структуры обратной связи.

Механическая составляющая необходимо присутствует в каждой мехатронной системе, поэтому механика является важнейшей составляющей мехатроники. И в механике, по нашему мнению, предстоит сделать еще очень много, чтобы создать возможности наиболее полного использования физической природы рассматриваемой задачи для превращения особенностей конкретной системы в ее преимущества по сравнению с полной общей постановкой задачи. Всего этого невозможно достигнуть без тщательного изучения собственных движений - движений неуправляемого объекта – на уровне аналитической механики. Такой анализ вместе с результатами современной математической теории управления и нелинейной теории устойчивости позволяет получить эффективные оценки минимально возможных размерностей векторов управления и измерения и, тем самым, определить необходимое количество исполнительных устройств и датчиков измерительной информации. Кроме этого, в процессе такого анализа возможно выявление качественного состава этой информации – что именно выгодней измерять с целью упрощения цепи обратной связи.

При реализации этого подхода большое значение имеет вид исходных уравнений движения механической составляющей мехатронных систем (разумеется, с учетом конкретного выбора исполнительных устройств). Здесь общеизвестна выгода введения таких обобщенных координат, в которых поведение изучаемого объекта описывается наиболее просто. Гораздо меньшее внимание, причем незаслуженно, уделяется определению типа используемых переменных (Лагранжа, Рауса или Гамильтона) при одном и том же выборе обобщенных координат. Наконец, огромнейшие, во многих случаях определяющие преимущества предоставляет векторно-матричная форма уравнений движения, причем такая [1-3], которая давала бы возможность, в отличие от традиционно используемых уравнений (см., напр., [4]), не только определить расположение корней характеристического уравнения, но и провести анализ структуры нелинейных членов с точки зрения необходимости проведения замены Ляпунова – Каменкова [5,6]. Кроме того, такие уравнения должны позволять решить важный для части прикладных задач вопрос о возможности сохранения асимптотической по части переменных устойчивости после этой нелинейной замены.

Строго обоснованный метод [7] решения задач стабилизации установившихся движений неголономных и голономных механических систем, а также систем с избыточными координатами при неполной информации о состоянии базируется на систематическом использовании полученных нелинейных векторно-матричных уравнений движения. При этом основные достижения связаны не только с решением задач устойчивости и стабилизации положений равновесия и стационарных движений неголономных систем с однородными и неоднородными связями, для которых, в частности, сравнительно давно [8] впервые (ср. с [4]) получены достаточные условия управляемости и наблюдаемости. Разработанные для таких систем методы перенесены на голономные системы (в том числе с избыточными координатами), для которых они дают существенное уменьшение размерностей управления и измерения по сравнению с традиционными подходами. Но применение этих результатов требует более полной и строгой постановки задачи стабилизации с учетом, например, возможности использования для формирования управления разной измерительной информации (в частности, о возмущениях координат, соответствующих связям Чаплыгина), возможной разницы в степени точности модели по разным степеням свободы и пр.

Достаточно очевидно, что такое рассмотрение практически неизбежно связано с громоздкими и трудоемкими аналитическими преобразованиями, выполнение которых значительно облегчается применением современных систем обработки символьной информации. Но эти системы, в силу своей универсальности, не ориентированы на решение рассматриваемого круга задач. Поэтому около 10 лет назад была начата работа по программной реализации развиваемого метода. И к настоящему времени, когда проблема стабилизации установившихся движений неголономных систем из абстрактно-академической задачи превратилась в актуальную задачу технической практики, в результате проводимых более 30 лет исследований не только разработан эффективный метод решения таких задач, но и близка к завершению его программная реализация.

В настоящей работе рассмотрено применение этого метода к задаче стабилизации стационарных движений неголономных систем. Установившиеся движения неголономных механических систем, как правило, являются неизолированными, т.е. расположены на многообразиях, размерность которых, вообще говоря, может быть не связана с количеством циклических координат или числом связей. Наличие многообразия установившихся движений обуславливает множество различных постановок задач об устойчивости и стабилизации. При этом необходимо каждый раз строго оговаривать, относительно каких координат системы и их скоростей (или импульсов) идет рассмотрение устойчивости, и, если решается задача стабилизации, какая при этом обеспечивается устойчивость (асимптотическая, неасимптотическая).

Уравнения движения. Неголономная механическая система задается вектором обобщенных координат, неинтегрируемыми связями и функцией Лагранжа системы без учета связей. Предполагается также, что на систему действуют потенциальные и непотенциальные обобщенные силы.

Наиболее удобны, с нашей точки зрения, для исследования устойчивости и стабилизации уравнения Воронца [9]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}-B_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial q_\mu}=\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \dot{q}_\mu}\right)_{\dot{q}_\mu\to\dot{q}_\rho}\Omega_{\mu\nu\rho}\,\dot{q}_\rho-\frac{\partial \Pi}{\partial q_\nu}-B_{\mu\nu}\frac{\partial \Pi}{\partial q_\mu}+Q_\nu+B_{\mu\nu}Q_\mu \qquad (1)$$

$$\dot{q}_\mu=B_{\mu\rho}\,\dot{q}_\rho$$

где: $$\Omega_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial q_\sigma} B_{\sigma\rho} - \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\sigma} B_{\sigma\nu} \qquad (2)$$

Для вывода векторно-матричных уравнений вектор обобщенных координат разбивается на некоторое число составляющих. Сначала производится очевидное разбиение на векторы координат, которым соответствуют зависимые в силу связей и независимые скорости. Далее, возможно, во-первых, разделение в соответствии с типом координат (координаты позиционные или в том или ином смысле циклические, соответствующие связям типа Чаплыгина и связям общего вида). Во-вторых, в некоторых случаях требуется учитывать разную степень точности математической модели, по отношению к конкретным переменным. В-третьих, вектор циклических координат приходится разбивать из-за наличия управляемых и неуправляемых циклических координат. В-четвертых, не всегда выгодно введение импульсов по всем циклическим координатам. Разбиение вектора обобщенных координат проводится в соответствии с особенностями конкретной задачи.

Процедура составления уравнений движения формально может обходиться без информации о типах координат введенного разбиения. Однако дальнейшее исследование, в частности, анализ стационарного движения системы невозможно без этих данных. Достаточно произвольное число векторных составляющих при разбиении приводит к необходимости разработки общей процедуры составления уравнений движения, которая должна содержать следующие этапы:

1. Получения матрицы коэффициентов кинетической энергии, матрицы коэффициентов в уравнениях связей, векторов обобщенных сил.
2. Вычисления членов неголономности.
3. Составления уравнений движения в векторно-матричном виде.

Исследование устойчивости и стабилизации. Здесь рассматривается общая постановка задачи о стабилизации стационарного движения системы до неасимптотической устойчивости по отношению ко всем координатам и скоростям, приложением управления возможно меньшей размерности и наиболее простой структуры. Требуется задать стационарное движение системы и, в соответствии с выбранной постановкой задачи, составить уравнения возмущенного движения в нормальной форме, линеаризованные в окрестности стационарного движения, затем получить нелинейные члены уравнений движения в явной форме.

Разрешимость задачи стабилизации осуществляется проверкой условий управляемости и наблюдаемости (в аналитической форме), далее определяются коэффициенты оптимального стабилизирующего управления методом [10] (в аналитическом виде в случае скалярного управления при размерности управляемой подсистемы не более 4, в противном случае – численным решением соответствующих уравнений для заданных значений параметров), и в заключение, проводится численное интегрирование замкнутой нелинейной системы при конкретных числовых параметрах системы.

Определение коэффициентов оптимального управления

Определение коэффициентов оптимального стабилизирующего управления осуществляется методом Н.Н.Красовского [10]. При этом, для заданного критерия качества:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(x, u)dt \qquad (3)$$

рассматривается уравнение Ляпунова – Беллмана - Риккати:

$$\min_u \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(\mathrm{A}x + \mathrm{B}u) + \omega(x,u) \right) = 0 \qquad (4)$$

где u - искомое управляющее воздействие, V - функция Ляпунова системы – квадратичная форма, которая подлежит определению. Из уравнения Беллмана, путем численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, определяются коэффициенты функции Ляпунова, а затем и искомое управление. Проинтегрировав численно приведенную к нормальному виду систему уравнений возмущенного движения, с конкретными числовыми параметрами и найденным управлением, получаем графики переходных процессов для координат системы.

Пример. Работа модуля [11] проиллюстрирована решением следующей задачи. Рассмотрим модель одноколесного велосипеда (рис.1), предложенную в [12]. Данная система представляет собой модель одноколёсного велосипеда, состоящего из однородного диска с двойным маятником, представляющим тело и конечность велосипедиста. Верхний маятник (конечность) свободно движется в плоскости, ортогональной к диску, в то время как нижний маятник остаётся “вертикальным” в плоскости диска. Положение системы определяется следующими обобщёнными координатами:

$$q' = (\theta, \chi, \phi, \psi, x, y)$$

Условие качения без проскальзывания приводит к уравнениям связей:

$$\dot{x} = -\dot{\phi} R \cos\psi, \qquad \dot{y} = -\dot{\phi} R \sin\psi$$

Функция Лагранжа системы без учёта связей:

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta \right) + B\left(\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi} \right)^2 \right] + \\
\frac{M}{2}\left[R^2\dot{\theta}^2 + 2R\left(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi \right)\dot{\theta}\cos\theta + \left(\dot{x} - R\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi \right)^2 + \left(\dot{y} - R\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi \right)^2 \right] + \\
\frac{m}{2}\left[(R+l)^2\dot{\theta}^2 + 2(R+l)\left(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi \right)\dot{\theta}\cos\theta + \left(\dot{x} - (R+l)\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi \right)^2 + \left(\dot{y} - (R+l)\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \right)^2 \right] + \\
\frac{\mu}{2}\left[(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\left(\dot{\chi} - \dot{\theta} \right)^2 + 2\rho(R+r)\left(\dot{\chi} - \dot{\theta} \right)\dot{\theta}\cos\chi + 2\left((R+r)\dot{\theta}\cos\theta + \rho\left(\dot{\chi} - \dot{\theta} \right)\cos(\chi-\theta) \right)\left(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi \right) \right] + \\
\frac{\mu}{2}\left[\left(\dot{x} - \dot{\psi}\cos\psi\left((R+r)\sin\theta + \rho\sin(\chi-\theta) \right) \right)^2 + \left(\dot{y} - \dot{\psi}\sin\psi\left((R+r)\sin\theta + \rho\sin(\chi-\theta) \right) \right)^2 \right] - \\
MgR\cos\theta - mg(R+r)\cos\theta - \mu g\left((R+r)\cos\theta - \rho\cos(\chi-\theta) \right).
\end{aligned}
$$

Здесь: θ - угол отклонения плоскости диска от вертикали; ψ - угол между линией пересечения плоскости диска и плоскости качения диска и осью Ox неподвижной системы $Oxyz$ (оси Ox и Oy расположены в плоскости качения, ось Oz направлена вертикально вверх); ϕ - угол собственного вращения диска; χ - угол отклонения конечности от плоскости диска; x, у - координаты точки касания диска и плоскости; M - масса диска, $\boldsymbol{R}$ – радиус диска; m - масса велосипедиста; μ - масса конечности; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – моменты инерции диска; r - расстояние от центра диска до верхнего сустава конечности (руки); l - расстояние от центра диска до массы m; ρ - длина конечности.

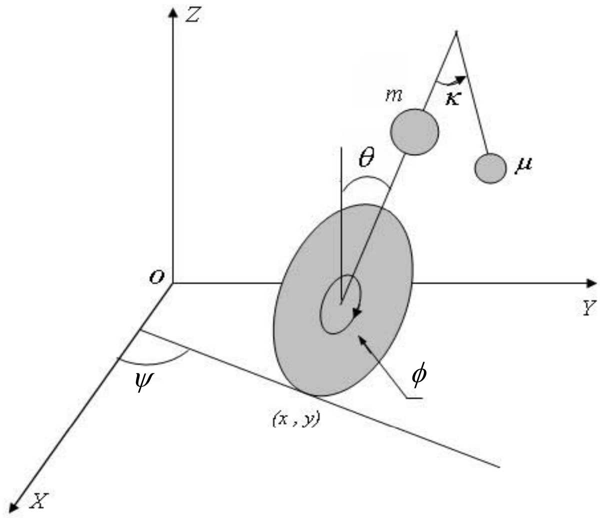


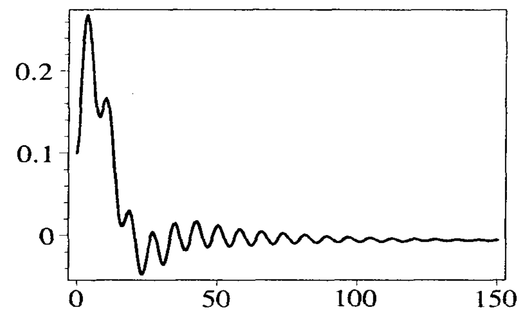
Рис 1. Модель одноколесного велосипеда

В работе [12] рассмотрена задача стабилизации этого движения при помощи управления, создаваемого за счёт отклонения верхнего маятника (конечности) от вертикали. При этом рассмотрение проводилось в переменных Рауса с существенным использованием групповой симметрии.

Возможность стабилизации определена проверкой критерия Рауса-Гурвица для сокращённой системы четвёртого порядка и сведением получающегося критического случая к теореме Ляпунова-Малкина. Метод определения коэффициентов стабилизирующего управления для конкретного частного случая в [12] не указан.

Здесь, для получения уравнений движения используются переменные Лагранжа, а коэффициенты стабилизирующего управления определены решением методом Н.Н. Красовского [10] задачи оптимальной стабилизации для выделенной [13] линейной управляемой подсистемы. Исследование проводилось с использованием модуля [11].

График переходного процесса для угла отклонения велосипеда от вертикали приведенный в работе [12] изображен на рис.2, при действии найденного в данной работе управления (для тех же, что и в [12] значений параметров и начальных возмущений) - на рис.3.



(a) $\theta_0 = 0.1$

Рис. 2

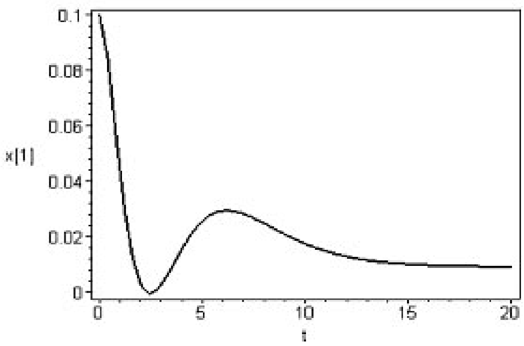


Рис. 3.

1. Красинская-Тюменева Э.М., Красинский А.Я. О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем. Вопросы вычислительной и прикладной математики, Выпуск 45, Ташкент, 1977.

2. Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем. // ПММ, 1988. Т.52. Выпуск 2., С.194-202.

3. Красинский А.Я. Об уравнениях движения в задаче об устойчивости состояний равновесия неголономных систем. Журнал «Известия вузов Узбекистана». – 2003, № 1-2. – С. 9-24.

4. Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. неголономные механические системы и стабилизация движения. Фундаментальная и прикладная математика. 2005, том 11, № 7. С. 117-158

5. Ляпунов А.М. Собрание сочетаний. Т.2. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1956. 473 с.

6. Каменков Г.В. Избранные труды. Т.2. М.: Наука 1972.

7. Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, Институт проблем управления им. В.А.Трепезникова РАН. 2-4 июня 2004 г. Электронное издание. С. 97-103.

8. Атажанов Б., Красинская Э.М. О стабилизации стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1988. Т.52. Вып. 6. С. 902-908.

9. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. - М.: Наука, 1967.

10. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва, Наука, 1966, С. 475-514.

11. Красинский А.Я. Модуль по автоматизации исследования устойчивости нелинейных систем. Государственное патентное ведомство Республики Узбекистан. Решение об официальной регистрации программ для ЭВМ DGU 20050097.

12. Zenkov D.V., Bloch A.M., Marsden J.E., The Lyapunov-Malkin Theorem and Stabilization of the Unicycle with Rider. // Systems and Control Letters. -2002.-Vol. 46. –P. 293-300.

13. Красинский А.Я. О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. ПММ, 1992. Т.52. Выпуск 6. С. 939-950.