

ДИНАМИКА ОМНИ-МОБИЛЬНОГО ЭКИПАЖА.

А.А. Зобова

В работе рассматриваются модели мобильных экипажей с колесами, которые в русскоязычной литературе получили - окольцованные и роликонесущие, а в англоязычной — “omni-wheel” (см. [1]) и “mecanum-wheel”, или “Swedish wheel” (см. [2]). Конструкция этих колес такова: на периферии диска каждого колеса укреплены ролики (их количество больше шести), так что колесо может опираться на несущую поверхность только роликом. Ролик может свободно вращаться относительно некоторой неподвижной в диске колеса оси. Для колес “omni-wheel” ось вращения ролика является касательной к окружности диска, для колес “mecanum” она повернута на угол 45° . Такое колесо обладает следующим свойством - опираясь на поверхность одним роликом, оно может катиться по прямой перпендикулярно плоскости диска (при этом опорный ролик вращается, а диск колеса нет). Практический подход к созданию экипажей с такими колесами хорошо освещен в зарубежных работах (см., например, [3,4] и библиографию в указанных статьях). В представленной работе для изучения динамики экипажа используются методы аналитической механики и теории устойчивости. Простейшей механической моделью омни-колеса является диск, катящийся по поверхности, причем скорость точки контакта - наинизшей точки диска, в которой происходит опора на несущую поверхность - трансверсальна плоскости диска. При этом величины реакции опорной поверхности принимаются такими, чтобы обеспечить отсутствие проскальзывания в продольном направлении. При использовании этой модели омни-колеса экипаж представляется механической системой с неинтегрируемыми дифференциальными связями. Статья представляет собой дальнейшее развитие идей, высказанных в [5,6].

Рассмотрим движение экипажа с окольцованными колесами радиуса R по шероховатой горизонтальной плоскости OXY . Орт \vec{e}_z оси Z направлен вертикально вверх. Введем связанную с тележкой ортонормированную систему координат $Q\xi\eta$: точка Q — некоторая фиксированная точка экипажа, ось $Q\eta$ проходит через центр масс системы S , расстояние QS равно D (см. рис. 1). Обозначим θ угол между осями OX и $Q\xi$. Пусть (x, y) — координаты точки S на плоскости OXY . Скорость центра масс разложим по ортам подвижной системы координат: $\vec{v}_s = Rv_1\vec{e}_\xi + Rv_2\vec{e}_\eta$. Тогда

$$\dot{x} = Rv_1 \cos \theta - Rv_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = Rv_1 \sin \theta + Rv_2 \cos \theta$$

Пусть на тележке установлено n колес ($n \geq 3$). Единичный вектор, выходящий из точки Q и направленный в центр i -ого колеса P_i , обозначим \vec{e}_i , вектор, ему перпендикулярный, через \vec{e}_i^\perp . Пусть α_i — угол между осью $Q\xi$ и вектором \vec{e}_i , d_i — расстояние QP_i , β_i — угол между осью $Q\xi$ и перпендикуляром \vec{n} к плоскости колеса. Вектор $\vec{\tau}_i$ — горизонтальный вектор, касательный к плоскости колеса. Пусть угол χ_i соответствует собственному вращению колеса. Введем направляющий вектор o_i оси ролика, — и угол γ_i между o_i и \vec{n}_i (см. рис. 2). Для омни-колес угол γ_i равен $\pi/2$, для колес “mecanum-wheel” $\gamma_i = \pi/4$. Будем моделировать колеса тележки абсолютно твердыми дисками, которые могут проскальзывать в направлении перпендикулярном \vec{o} (это проскальзывание соответствует вращению того ролика, на который в данный момент опирается колесо) и движутся без проскальзывания в направлении \vec{o} (перекат с одного ролика на другой). Динамика роликов в этой модели не учитывается.

Запишем условие отсутствия проскальзывания в направлении \vec{o} . Для этого выразим скорости точки центра колеса P_i и наинизшей точки колеса M_i (рис. 3) через $v_1, v_2, \dot{\theta}$:

$$\vec{v}_{P_i} = \vec{v}_Q + [\dot{\theta} \vec{e}_z \times d_i \vec{e}_i] = (Rv_1 + D\dot{\theta}) \vec{e}_\xi + Rv_2 \vec{e}_\eta + \dot{\theta} d_i \vec{e}_i^\perp.$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{P_i} + [-\dot{\chi}_i \vec{n} \times (-R\vec{e}_z)] = \vec{v}_{P_i} + \dot{\chi}_i R \vec{\tau}_i$$

Скорость точки M_i перпендикулярна вектору \vec{o} . Вычислив скалярные произведения $(\vec{\tau}_i, \vec{o})$, (\vec{e}_ξ, \vec{o}) , (\vec{e}_η, \vec{o}) , $(\vec{e}_i^\perp, \vec{o})$, найдем дифференциальное уравнение связи:

$$\dot{\chi}_i \sin \gamma_i = \cos(\beta_i + \gamma_i) v_1 + \sin(\beta_i + \gamma_i) v_2 + (\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)) \dot{\theta}$$

Здесь Δ и δ_i — безразмерные длины: $D = \Delta R, d_i = \delta_i R$.

Выпишем кинетическую энергию системы:

$$2T = M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_S \dot{\theta}^2 + J(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dots + \dot{\chi}_n^2)$$

Здесь M — полная масса системы, I_S — полный момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку S , J — момент инерции каждого колеса относительно оси \vec{n}_i (они предполагаются одинаковыми). Введем безразмерные параметры Λ и λ следующим образом: $I_S = \Lambda^2 MR^2$, $J = \lambda^2 MR^2$, и введем скорость $v_3 = \Lambda \dot{\theta}$, тогда кинетическая энергия принимает вид

$$2T = MR^2 \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \lambda^2 (\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dots + \dot{\chi}_n^2) \right)$$

Запишем связь между скоростями $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\chi}_i, i = 1..n$ и v_1, v_2, v_3 в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\chi}_n \end{pmatrix} = \Xi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\beta_1 + \gamma_1)}{\sin \gamma_1} & \frac{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}{\sin \gamma_1} & \sigma_1 \\ \frac{\cos(\beta_2 + \gamma_2)}{\sin \gamma_2} & \frac{\sin(\beta_2 + \gamma_2)}{\sin \gamma_2} & \sigma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\cos(\beta_n + \gamma_n)}{\sin \gamma_n} & \frac{\sin(\beta_n + \gamma_n)}{\sin \gamma_n} & \sigma_n \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i = (\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i))(\Lambda \sin \gamma_i)$, $i = 1..n$

Для вывода уравнений движения по инерции (внешних силовых воздействий нет) использовался метод, предложенный в [7]. Уравнения движения имеют следующую структуру:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_1} = \frac{MR^2}{\Lambda} v_2 v_3, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_2} = -\frac{MR^2}{\Lambda} v_1 v_3, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_3} = 0 \quad (1)$$

Здесь $T^* = T^*(v_1, v_2, v_3) = MR^2 \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$ --- кинетическая энергия системы с учетом связей, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$ --- трехмерный вектор псевдоскоростей, скоростей, $\mathbf{A} = \mathbf{E} + \lambda^2 \Xi^T \Xi$ --- постоянная 3×3 матрица. В матричном виде уравнения (1) записываются следующим образом:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Система допускает интеграл энергии $T^* \equiv \mathbf{const}$ и линейный интеграл $\frac{\partial T^*}{\partial v} \equiv \mathbf{const}$, а также инвариантную меру $\mu = \frac{dv_1 \wedge dv_2 \wedge dv_3}{|v_3|}$. В пространстве псевдоскоростей v_1, v_2, v_3 траектории системы лежат на сечении эллипсоида $MR^2 \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = 2h$, определяющим уровень интеграла энергии, плоскостью $\frac{\partial T^*}{\partial v_3} = MR^2 k$.

Рассмотрим экипаж с тремя колесами со следующей геометрией (см. рис. 4,

цифры в кружочках обозначают номер колеса):

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = \pi, \quad \beta_i = \alpha_i, \quad \gamma_i = \pi/2, i=1..3, \quad \delta_1/\Lambda = \delta_3/\Lambda = \sigma > 0, (\delta_2 - \Delta)/\Lambda = \rho > 0$$

. Тогда матрицы Ξ и A имеют вид

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sigma \\ -1 & 0 & \rho \\ 0 & -1 & \sigma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -\kappa A_3 \\ 0 & A_2 & 0 \\ -\kappa A_3 & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где $A_1 = 1 + \lambda^2, A_2 = 1 + 2\lambda^2, A_3 = 1 + (2\sigma^2 + \rho^2)\lambda^2, \kappa = \rho\lambda^2/A_3$. Заметим, что κ (с точностью до положительного множителя) — расстояние от переднего колеса до центра масс системы. Уравнения движения (2) в этом случае принимают вид:

$$A_1 \dot{v}_1 - \kappa A_3 \dot{v}_3 = \frac{1}{\Lambda} v_2 v_3, \quad A_2 \dot{v}_2 = -\frac{1}{\Lambda} v_1 v_3, \quad -\kappa A_3 \dot{v}_1 + A_3 \dot{v}_3 = 0 \quad (3)$$

Предположим, что $\kappa \neq 0$, и выразим v_1 через v_3 , k — константа линейного интеграла:

$$v_1 = \frac{A_3 v_3 + k}{A_3 \kappa}; \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнения (5), получим следующую систему уравнений:

$$\left(\kappa A_3 + \frac{A_1}{\kappa} \right) \dot{v}_3 = \frac{1}{\Lambda} v_2 v_3, \quad A_2 \dot{v}_2 = -\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{A_3 v_3 - k}{\kappa A_3} \right) v_3 \quad (5)$$

На плоскости (v_3, v_2) траектории системы принадлежат эллипсам с центром на оси

$$v_2 = 0. \text{ (Фазовый портрет представлен на рис. 5). Центр эллипса } v_2 = 0, v_3 = -\frac{k}{A_3}$$

соответствует равномерному вращению экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс ($v_1 \equiv 0, v_2 \equiv 0, \dot{\theta} = \omega \equiv \mathbf{const}, x \equiv x_0, y \equiv y_0$). Особая прямая $v_3 = 0$ соответствует равномерному прямолинейному движению экипажа (угол θ во время движения постоянен, причем ось симметрии экипажа не обязана быть параллельна курсу).

Изучим движение изображающей точки по фазовым траектории. Из уравнений (5) следует, что

$$\dot{v}_3 = \frac{\kappa}{\Lambda (A_1 - \kappa^2 A_3)} v_2 v_3.$$

Коэффициент $A_1 - \kappa^2 A_3 = (A_1 A_3 - \kappa^2 A_3^2)/A_3 > 0$, так как $A_3 > 0$ и $A_1 A_3 - \kappa^2 A_3^2 > 0$ (диагональный минор положительно определенной матрицы \mathbf{A}). На плоскости (v_3, v_2) в первой и третьей четвертях $\dot{v}_3 > 0$, а во второй и четвертой четвертях $\dot{v}_3 < 0$.

Получаем, что прямолинейные движения $v_2 = \mathbf{const}, v_3 = 0$ устойчивы при $v_2 < 0$ и неустойчивы при $v_2 > 0$. Физический смысл этого условия заключается в том, что прямолинейное движение устойчиво, если и только если центр масс во время движения находится позади оси параллельных колес 1 и 3.

Рассмотрим теперь случай $\kappa = 0$: в этом случае любое движение экипажа происходит с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta} = v_3/\Lambda = \mathbf{const}$ и постоянной скоростью центра масс $v_1^2 + v_2^2 = \mathbf{const}$, который описывает на опорной плоскости окружность.

Заметим, что в системе (3) с произвольной симметричной положительно-определенной матрицей \mathbf{A} также существуют стационарные движения двух типов — равномерные вращения $v_1 \equiv 0, v_2 \equiv 0, v_3 = v_3^\circ$ и прямолинейные равномерные движения $v_1 = v_1^\circ, v_2 = v_2^\circ, v_3 = 0$. Рассмотрим вопрос об устойчивости прямолинейных движений по первому приближению: пусть $v_1 = v_1^\circ + \delta v_1, v_2 = v_2^\circ + \delta v_2, v_3 = 0 + \delta v_3$. Запишем линеаризованные уравнения возмущений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta v}_1 \\ \dot{\delta v}_2 \\ \dot{\delta v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} v_2^\circ \delta v_3 \\ -v_1^\circ \delta v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Корни характеристического уравнения этой системы уравнений имеют вид:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = -\frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})v_2^\circ + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})v_1^\circ}{\Lambda \det \mathbf{A}}$$

Следовательно, необходимое условие устойчивости прямолинейного движения определяется неравенством

$$(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})v_2^\circ + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})v_1^\circ > 0$$

Опираясь на полученные результаты, можно качественно изобразить проекции фазовых траекторий на плоскость (v_3, v_2) (см. рис. 6)

Рассмотрим теперь управляемое движение экипажа. Пусть к колесам со стороны корпуса приложены управляющие моменты $M_i = M_i \bar{n}_i$: $M_i = c_1 U_i - c_2 \dot{\chi}_i$, $i = 1 \dots n$. Такое описание приводов с двигателями постоянного тока является общепринятым при рассмотрении динамики мобильных экипажей (см. [8]). Здесь U_i — управляющие напряжения. Уравнения управляемых движений имеют вид:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c_1}{MR^2} \Xi^T \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} - \frac{c_2}{MR^2} \Xi^T \Xi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Упростим эти уравнения, сделав линейную с постоянными коэффициентами замену управляющих параметров и вводя безразмерное время $\tau = c_2 t / MR^2$:

$$A \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \Xi^T \Xi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — новые управляющие параметры, точкой обозначена производная по новому времени τ .

Рассмотрим динамические уравнения для экипажа, изображенного на рисунке 4:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{v}_1 - \kappa A_3 \dot{v}_3 &= \frac{1}{\Lambda} v_2 v_3 + w_1 - (v_1 - \rho v_3) \\ A_2 \dot{v}_2 &= -\frac{1}{\Lambda} v_1 v_3 + w_2 - 2v_2 \\ -\kappa A_3 \dot{v}_1 + A_3 \dot{v}_3 &= w_3 - (-\rho v_1 + (2\sigma^2 + \rho^2) v_3) \end{aligned} \quad (6)$$

Исследуем (следуя работе [9]) стационарные движения этой системы ($v_1(t) \equiv p = \text{const}, v_2(t) \equiv r = \text{const}, v_3(t) \equiv \omega = \text{const}$) при постоянных управлениях.

Постоянные стационарных движений можно определить из системы уравнений:

$$(2\sigma^2 + \rho^2)\omega^3 - v_3\omega^2 + (4\sigma^2 - \rho w_2)\omega - 2(w_1\rho + v_3) = 0 \quad (7)$$

$$p = \frac{-w_3 + (2\sigma^2 + \rho^2)\omega}{\rho}, \quad r = \frac{\Lambda w_2 - p\omega}{2\Lambda} \quad (8)$$

В окрестности стационарного движения $v_1 = p + \delta p, v_2 = r + \delta r, v_3 = \omega + \delta\omega$ динамические уравнения можно линеаризовать, тогда уравнения для возмущений имеют вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & -\kappa A_3 \\ 0 & A_2 & 0 \\ -\kappa A_3 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta p} \\ \dot{\delta r} \\ \dot{\delta\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \omega/\Lambda & (r + \rho\Lambda)/\Lambda \\ -\omega/\Lambda & -2 & -p/\Lambda \\ \rho & 0 & -(2\sigma^2 + \rho^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta r \\ \delta\omega \end{pmatrix} \quad (10)$$

В этом уравнении значения p, r, ω должны быть выражены через параметры управления из (7),(8).

Рассмотрим такие значения управляющих параметров, при которых возможно

прямолинейное стационарное движение (параллельные колеса равномерно вращаются в одну сторону). Тогда управляющие параметры должны быть связаны соотношением $w_3 = -\rho w_1 \equiv \text{const}$. Тогда существует два типа стационарных движений: 1) прямолинейные

$$\omega = 0, p = w_1, r = \frac{w_2}{2} \quad (11)$$

и 2) “косые” (на опорной плоскости центр масс движется по окружности, при этом экипаж равномерно вращается вокруг центра масс)

$$(\rho^2 + 2\sigma^2)\omega^2 + \rho w_1 \omega + \Lambda(4\Lambda\sigma^2 - w_2\rho) = 0, p = \frac{\rho w_1 + (\rho^2 + 2\sigma^2)\omega}{\rho}, r = \frac{2\Lambda\sigma^2}{\rho} \quad (12)$$

Анализ характеристического многочлена уравнений (10) для прямолинейных движений (11) дает условие асимптотической устойчивости этих движений

$$4\Lambda\sigma^2 - \rho w_2 > 0,$$

т.е. асимптотически устойчивым будет движение, при котором проекция скорости центра масс на ось $Q\eta$ не превосходит некоторой величины: $v_2 \equiv r = \frac{w_2}{2} < \frac{2\Lambda\sigma^2}{\rho}$.

Исследуем “косые” стационарные движения. На бифуркационной диаграмме (w_2, ω) (рис. 7, знаком “+” отмечены асимптотически устойчивые движения, знаком “-” — неустойчивые) это семейство представляется параболой, ветви которой направлены вправо, с вершиной в точке $\omega_* = -\rho w_1 / 2(\rho^2 + 2\sigma^2), (w_2)_* = 4\Lambda\sigma^2 / \rho - \rho w_1^2 / 2\Lambda(\rho^2 + 2\sigma^2)$.

Запишем характеристическое уравнение системы (10), принимая во внимание (12):

$$M_3\mu^3 + M_2\mu^2 + M_1\mu + M_0 = 0, \quad M_3 > 0, M_2 > 0, M_1 > 0, M_0 = \frac{1}{\Lambda^2} (2(\rho^2 + 2\sigma^2)\omega^2 + \rho w_1 \omega).$$

При $\omega = 0$ и при $\omega = \omega_*$ происходит смена знака действительного корня характеристического уравнения, а следовательно, и характера устойчивости. Анализ выражения $R = M_1 M_2 - M_0 M_3$ показывает, что существуют такие значения инерционных и геометрических параметров, при которых $R < 0$ в некоторой области $(-\infty, \omega_*) \cup (\omega^*, +\infty)$, а в дополнении к указанной области $R \geq 0$ (при этом $(\omega_*, \omega^*) \supset (\omega_*, 0)$). Получаем, что движения при $\omega_* < \omega < 0$ асимптотически неустойчивы, $\omega_* < \omega < \omega_*, 0 < \omega < \omega^*$ асимптотически устойчивы. При некоторых значениях параметров, в конечных точках указанного интервала происходит бифуркация

Андропова-Хопфа с возникновением неустойчивого предельного цикла.

Автор благодарит проф. А.В. Карапетяна и проф. Я.В. Татарина за постоянное внимание к работе, помощь и поддержку. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00290, 06-08-01574.

[1] <http://kornylak.com/wheels/omniwheel.html>

[2] *Bengt Erland Ilon* Wheels for a course stable self propelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base // US Patent 3,876,255

[3] *Robert L. Williams II, Brian E. Carter, Paolo Gallina, Giulio Rosati* Dynamic Model with Slip for Wheeled Omni-Directional Robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation Vol. 18, No. 3, pp. 285-293, 2002

[4] *Ashmore M., Barnes N.* Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path between two points is not a straight line.

[5] *Зобова А.А., Татарин Я.В.* Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. Материалы научной школы-конференции. Москва, 23-27 октября 2006 г. М.: Издательство Московского университета, 2006.

[6] *A.A. Zobova, Ya.V. Tatarinov* Dynamics and Control of Omni-Wheeled Vehicle // Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. August 01-06, 2007, Velikie Luki. Books of Abstracts. Moscow-Velikie Luki, 2007. pp. 139-140.

[7] Татарин Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. // М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. – 88 с.

[8] *Девянин Е.А., Буданов В.М.* О движении колесных роботов. // ПММ, Т.26, вып. 2, с. 244-255. 2003 г.

[9] *Карапетян А.В., Салмина М.А.* Бифуркации Пуанкаре-Четаева и Андропова-Хопфа в динамике трехколесного робота. // М.: Вестник МГУ, Сер. мат., мех., вып. 2. 2005 г.